BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2010

RİYAZİYYAT

О СУЩЕСТВОВАНИИ В ЦЕЛОМ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

К.И.ХУДАВЕРДИЕВ, М.Г.МАХМУДОВА

Бакинский Государственный Университет

karlenkhudaverdiyev @ yahoo.com

В работе изучены вопросы существования и единственности решения почти всюду одномерной смешанной задачи с однородными граничными условиями типа Рикье для полулинейного уравнения Буссинеска вида

$$u_{tt}(t,x) - 2\alpha u_{txx}(t,x) + u_{xxxx}(t,x) =$$
$$= F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)),$$

где $0 \le t \le T < +\infty, 0 \le x \le \pi$; $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ *- фиксированное число.*

Введено понятие решения почти всюду изучаемой смешанной задачи. Решение почти всюду ищется в виде ряда Фурье:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx \quad (0 \le t \le T, 0 \le x \le \pi),$$

причём после применения метода Фурье нахождение функций $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ *сведено к решению некоторой счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Далее, при довольно общих односторонних ограничениях на нелинейную правую часть рассматриваемого уравнения, для решений почти всюду изучаемой смешанной задачи получена в*

$$C\left([0,T];W_2^4(0,\pi)\right) \cap C^{(1)}\left([0,T];W_2^2(0,\pi)\right)$$

априорная оценка и, тем самым, доказана теорема существования в целом (т.е. для любого конечного значения T *) решения почти всюду.*

Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности решения почти всюду следующей одномерной смешанной задачи:

$$
\begin{cases}
u_{tt}(t,x)-2\alpha u_{txx}(t,x)+u_{xxxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),\\
\qquad\qquad u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)) \ \ (0\le t\le T, 0\le x\le \pi), & (1)\\
u(0,x)=\varphi(x) \quad (0\le x\le \pi), \ \ u_t(0,x)=\psi(x) \quad (0\le x\le \pi), & (2)\\
u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0 \quad (0\le t\le T), & (3)
\end{cases}
$$

где $0<\alpha<1$; $0<T<+\infty$; F,φ,ψ –заданные функции, а $u(t,x)$ – искомая функция, причём под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)\in C([0,T]\times[0,\pi])$;
$u_{xxxx}(t,x),u_{txx}(t,x),u_{tt}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\pi))$;

б) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

в) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в $(0,T)\times(0,\pi)$.

Так как система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое решение почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\,, \tag{4}$$

где

$$u_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t,x)\sin nx\,dx \ \ (n=1,2,\ldots;\ t\in[0,T]). \tag{5}$$

Тогда, после применения метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
u_n(t)=&\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2t+\cos\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2t\right)\cdot e^{-\alpha n^2 t}\cdot\varphi_n+\\
&+\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}\cdot n^2}\cdot\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2t\cdot e^{-\alpha n^2 t}\cdot\psi_n+\\
&+\frac{2}{\pi\sqrt{1-\alpha^2}\cdot n^2}\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}\mathrm{I}\,(u(\tau,x))\sin nx\cdot e^{-\alpha n^2(t-\tau)}\times\\
&\times\sin\sqrt{1-\alpha^2}\,n^2(t-\tau)\,dx\,d\tau \quad (n=1,2,\ldots;\ t\in[0,T]),
\end{aligned} \tag{6}
$$

где

$$\varphi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx\,, \quad \psi_n\equiv\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(x)\sin nx\,dx \ \ (n=1,2,\ldots), \tag{7}$$

$$\mathrm{I}\,(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)). \tag{8}$$

Исходя из определения решения почти всюду задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$ – любое решение почти всюду задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (6).

С помощью неравенства Беллмана доказана следующая теорема о единственности в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 1. Пусть

1. $F(t,x,u_1,\ldots,u_6)\in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^6$

$$\left|F(t,x,u_1,\ldots,u_6)-F(t,x,\widetilde{u}_1,\ldots,\widetilde{u}_6)\right|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{6}\left|u_i-\widetilde{u}_i\right|,$$

где $C_R>0$ – постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного решения почти всюду.

Далее, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказана следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 2. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(3)}([0,\pi]),\ \varphi^{(4)}(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=0$;
   $\psi(x)\in C^{(1)}([0,\pi]),\ \psi''(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\psi(0)=\psi(\pi)=0$.
2. $F(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6), F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\ (i=\overline{0,6})\in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$.
3. $F(t,0,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=F(t,\pi,0,\xi_2,0,\xi_4,0,\xi_6)=0\ \ \forall t\in[0,T],\ \xi_2,\xi_4,\xi_6\in(-\infty,\infty)$.

Тогда существует в малом решение почти всюду задачи (1)-(3).

Замечание 1. Так как из условия 2 теоремы 2 следует выполнение всех условий теоремы 1, то при условиях теоремы 2 решение почти всюду задачи (1)-(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

Замечание 2. Отметим, что условия 1 теоремы 2, наложенные на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, не только достаточны, но и необходимы для существования решения почти всюду задачи (1)-(3).

Стандартным методом, т.е. умножением рассматриваемого уравнения на подходящую функцию и последующим почленным интегрированием (включая некоторые интегрирования по частям), доказана следующая теорема об априорной ограниченности (в определённом смысле) решений почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx})=$$
$$=f(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx})+f_0(x,u)+f_1(t,u_t)\cdot u_{tx}+(f_2(x,u_x))_x, \qquad (9)$$

причём

а) $f_0(x,u)\in C([0,\pi]\times(-\infty,\infty))$ и $\forall x\in[0,\pi],\ u\in(-\infty,\infty)$

$$\int_0^u f_0(x,\xi)d\xi\equiv g_0(x,u)\le C\cdot(1+u^2)\,; \qquad (10)$$

б) $f_1(t,V) \in C([0,T]\times(-\infty,\infty))$; (11)

в) $f_2(x,V) \in C^{(1)}([0,\pi]\times(-\infty,\infty))$ и $\forall x \in [0,\pi]$, $V \in (-\infty,\infty)$

$$-\int_0^V f_2(x,\xi)d\xi \equiv g_2(x,V) \le C + \delta \cdot V^2, \quad 0 \le \delta < \frac{1}{2\pi^2}; \tag{12}$$

г) $f(t,x,u_1,\dots,u_6) \in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$ и в $[0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6$

$$f(t,x,u_1,\dots,u_6)\cdot u_5 \le C\cdot(1+u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_5^2)+\delta_0\cdot u_6^2,\ 0\le\delta_0<2\alpha, \tag{13}$$

где $C>0$ – постоянная.

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) справедливы априорные оценки:

$$\int_0^\pi u_t^2(t,x)dx \le C_0,\quad \int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx \le C_0 \quad \forall t \in [0,T];\quad \int_0^T\int_0^\pi u_{tx}^2(t,x)dxdt \le C_0. \tag{14}$$

Следствие. Из второй априорной оценки (14) следует справедливость следующих априорных оценок:

$$\|u(t,x)\|_{C(Q_T)} \le R_0,\qquad \|u_x(t,x)\|_{C(Q_T)} \le R_0, \tag{15}$$

где $Q_T \equiv [0,T]\times[0,\pi]$.

Замечание 3. Отметим, что функция $f_0(x,u)$, фигурирующая в (9) и удовлетворяющая условию (10), в частности, может иметь виды:

$$f_0(x,u) = -u^{2k-1},\quad f_0(x,u) = -2ku^{2k-1}\cdot e^{u^{2k}} \tag{16}$$

и т.д., где k – любое натуральное число. Кроме того, как видно из (11), от функции $f_1(t,V)$, фигурирующей в (9), при $|V|\to+\infty$ ничего не требуется, т.е. на порядка её роста при $|V|\to+\infty$ никакого ограничения нет. Далее, функция $f(t,x,u_1,\dots,u_6)$, удовлетворяющая одностороннему условию (13), в частности, может иметь вид:

$$f(t,x,u_1,\dots,u_6) = -u_5^{2k-1}\cdot\Phi(t,x,u_1,\dots,u_6), \tag{17}$$

где k – любое натуральное число, а функция $\Phi(t,x,u_1,\dots,u_6) \in C([0,T]\times$ $\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^6)$ – совершенно произвольная, удовлетворяющая лишь условию $\Phi(t,x,u_1,\dots,u_6) \ge 0$.

Далее, пользуясь априорными оценками (14) и априорными оценками (15), вытекающими из (14), доказана следующая теорема о более сильной, чем (14), априорной оценке для решений почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 4. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.

2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^2\times(-\infty,\infty)^4$

$$|F(t,x,u_1,\dots,u_6)| \le C_R\cdot\{1+|u_3|\cdot(|u_3|+|u_3|\cdot|u_5|+u_5^2+|u_6|)+|u_4|\cdot(1+|u_5|)+$$
$$+|u_5|^3+|u_5|\cdot|u_6|+|u_6|\},$$

т.е.

$$\left|F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_t,u_{tx})\right| \le C_R \cdot \{1+|u_{xx}|\cdot(|u_{xx}|+|u_{xx}|\cdot|u_t|+u_t^2+|u_{tx}|)+$$
$$+|u_{xxx}|\cdot(1+|u_t|)+|u_t|^3+|u_t|\cdot|u_{tx}|+|u_{tx}|\}, \quad (18)$$

где $C_R > 0$ – постоянная.

Тогда всевозможные решения почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) априори ограничены в

$$C\big([0,T];W_2^3(0,\pi)\big)\cap C^{(1)}\big([0,T];W_2^1(0,\pi)\big). \quad (19)$$

Следствие. Из последней априорной оценки, для решений почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) следует справедливость следующих априорных оценок:

$$\|u(t,x)\|_{C(Q_T)} \le C_0,\ \|u_x(t,x)\|_{C(Q_T)} \le C_0,\ \|u_{xx}(t,x)\|_{C(Q_T)} \le C_0,\ \|u_t(t,x)\|_{C(Q_T)} \le C_0; \quad (20)$$

$$\int_0^\pi u_{xxx}^2(t,x)dx \le C_0, \quad \int_0^\pi u_{tx}^2(t,x)dx \le C_0 \quad \forall t\in[0,T]. \quad (21)$$

Пользуясь априорными оценками (20) и (21), доказана следующая теорема о более сильной, чем в (19), априорной оценке для решений почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 5. Пусть

1. Выполнены условия 2 и 3 теоремы 2.

2. Выполнены все условия теоремы 4.

3. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^3\times(-\infty,\infty)\times[-R,R]\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\right| \le C_R\cdot(1+\xi_4^2+\xi_6^2)\ \ (i=0,1,2), \quad (22)$$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\right| \le C_R\cdot(1+|\xi_4|+|\xi_6|)\ \ (i=3,5), \quad (23)$$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\right| \le C_R\ \ (i=4,6), \quad (24)$$

где $C_R > 0$ – постоянная.

Тогда всевозможные решения почти всюду задачи (1)-(3) априори ограничены в

$$C\big([0,T];W_2^4(0,\pi)\big)\cap C^{(1)}\big([0,T];W_2^2(0,\pi)\big). \quad (25)$$

Следствие. Из последней априорной оценки, для решений почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) следует справедливость следующих априорных оценок:

$$\left\|\frac{\partial^i u(t,x)}{\partial x^i}\right\|_{C(Q_T)} \le C_0\ \ (i=\overline{0,3}), \qquad \left\|\frac{\partial^{1+j} u(t,x)}{\partial t\,\partial x^j}\right\|_{C(Q_T)} \le C_0\ \ (j=0,1); \quad (26)$$

$$\int_0^\pi u_{xxxx}^2(t,x)dx \le C_0, \quad \int_0^\pi u_{txx}^2(t,x)dx \le C_0 \quad \forall t\in[0,T]. \quad (27)$$

Наконец, пользуясь теоремой 2 о существовании в малом решения почти всюду задачи (1)-(3)) и теоремами 3-5, за три этапа, последовательно усиливаясь, обеспечивающих априорную ограниченность в (25) (теорема 5) решений почти всюду задачи (1)-(3), доказана следующая теорема о существовании в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 6. Пусть
1. Выполнены все условия теоремы 2.
2. Выполнены все условия теоремы 3.
3. Выполнено условие 2 теоремы 4.
4. Выполнено условие 3 теоремы 5.

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение почти всюду.

Замечание 4. Отметим, что данная работа является продолжением работ [1] и [2], в которых изучены вопросы существования и единственности обобщенного и классического решений задачи(1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Махмудова М.Г. Исследование обобщенного решения одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвёртого порядка // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2006, №1, с.41-51.
2. Махмудова М.Г. Исследование классического решения одномерной смешанной задачи для одного полулинейного уравнения Буссинеска четвёртого порядка // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2006, №3, с.33-38.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB YARIMXƏTTİ BİR BUSSİNESK TƏNLİYİ ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN SANKİ HƏR YERDƏ HƏLLİNİN QLOBAL VARLIĞI HAQQINDA

K.İ.XUDAVERDİYEV, M.H.MAHMUDOVA

XÜLASƏ

İşdə yarımxətti

$$u_{tt}(t,x)-2\alpha u_{txx}(t,x)+u_{xxxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x))$$

şəklində Bussinesk tənliyi üçün bircins Rikye tipli sərhəd şərtli birölçülü qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin varlığı və yeganəliyi məsələləri öyrənilir, burada $\alpha\ (0<\alpha<1)$ – qeyd olunmuş ədəddir; $0\le t\le T<+\infty, 0\le x\le\pi$.

Öyrənilən qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinə tərif verilir və o, $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx.$ Furye sırası şəklində axtarılır. Furye metodunu tətbiq etdikdən sonra $u_n(t)\quad (n=1,2,\ldots)$ funksiyalarının tapılması müəyyən hesabi qeyri-xətti inteqro-diferensial tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Sonra, baxılan tənliyin qeyri-xətti sağ tərəfinə kifayət qədər ümumi birtərəfli qiymətləndirmə şərti qoymaqla öyrənilən qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həlləri üçün

$$C\left([0,T];W_2^4(0,\pi)\right)\cap C^{(1)}\left([0,T];W_2^2(0,\pi)\right)$$

fəzasında aprior qiymətləndirmə alınır və bununla da sanki hər yerdə həllin qlobal varlığı haqqında teorem isbat edilir.

ON GLOBAL EXISTENCE OF ALMOST EVERYWHERE SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR A FOURTH ORDER SEMI-LINEAR BOUSSINESQ EQUATION

K.I.KHUDAVERDIYEV, M.G.MAHMUDOVA

SUMMARY

This work presents a study of existence and uniqueness of almost everywhere solution of one-dimensional mixed problem with Riquier type homogenous boundary conditions for a Boussinesq equation of the following form:

$$u_{tt}(t,x)-2\alpha u_{txx}(t,x)+u_{xxxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)),$$

where α $(0<\alpha<1)$ is a fixed number, $0\le t\le T<+\infty$, $0\le x\le \pi$.

The concept of almost everywhere solution for the mixed problem under consideration is introduced, and this solution is sought in the form of Fourier series $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx$. After applying Fourier method, the finding of functions $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ is reduced to solving some countable system of nonlinear integro-differential equations. Then, imposing rather general one-sided estimate condition on nonlinear right side of the considered equation, a priori estimate in space

$$C([0,T];W_2^4(0,\pi))\cap C^{(1)}([0,T];W_2^2(0,\pi))$$

for almost everywhere solutions of mixed problem under consideration is obtained, and thus, a global existence theorem for almost everywhere solution is proved.